Métodos Numéricos
9 de noviembre de 2018
Segundo Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas ☐ Completar nombre en las hojas	Lib. Univ. 319/16		Nombre y Apellido Eric Brandwein		
☐ Completar LU y nombre en el enunciado ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Ej. 1 21	Ej. 2 20	Ej. 3 25	Ej. 4 25	Nota 91 AP

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sus autovalores. Supongamos que los autovalores de A verifican la condición: $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ una base de autovectores de A tal que v_i es autovector de A asociado al autovalor λ_i ($\forall i : 1 \leq i \leq n$). Sea $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz definida por $C = A - \lambda_1 \dfrac{v_1 v_1^t}{v_1^t v_1}$.
   (a) Hallar todos los autovalores de C. (7 puntos)
   (b) Probar que C es diagonalizable y proponer una base de autovectores de C. (8 puntos)
   (c) Utilizando el *Método de la Potencia*, deducir un mecanismo para hallar λ_2. Precisar las hipótesis para las cuales el mecanismo propuesto converge. (10 puntos)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica y definida positiva. Sean $\mu, \varepsilon \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$ tales que $\|(A - \mu I)v\|_2 \leq \varepsilon \|v\|_2$. Probar que A tiene un valor singular en el intervalo $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$. (*Sugerencia*: escribir v como combinación lineal de los elementos de una base de autovectores de A.) (25 puntos)

3. Sean $A = U\Sigma V^t$ una SVD de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, con $v_1, \ldots, v_n$ las columnas de V. Se propone el siguiente esquema iterativo dado un $x^{(0)}$ inicial:

$$x_i^{(k+1)} = \sigma_i \; v_i^t x^{(k)} + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

   (a) Probar que si el esquema iterativo converge, entonces lo hace a una solución del sistema $(U - A)x = Ub$. (10 puntos)
   (b) Probar que si $\sigma_1 < 1$ entonces el esquema converge. (15 puntos)

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Sea x^* la solución de cuadrados mínimos del sistema $Ax = b$.
   (a) Siendo $r = b - Ax^*$, probar que x^* resuelve el problema de cuadrados mínimos $\min_x \|Ax - (b + \alpha r)\|$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. (10 puntos)
   (b) Sean $p_1 = (1, 0)$ y $p_2 = (1, 1)$ dos puntos en $\mathbb{R}^2$.
      i. Hallar mediante cuadrados mínimos la recta que pasa por el origen más cercana a los puntos p_1 y p_2. (8 puntos)
      ii. Usar el item (a) para hallar otro par de puntos p_1' y p_2' (distintos a p_1 y p_2) tal que la recta que pasa por el origen más cercana, sea la misma que la hallada en el item anterior. (7 puntos)